Números Complejos ℂ

Resumen

Definición

El conjunto ℂ es el conjunto de los números complejos

Z ∊ ℂ ⇔ Z = a + bi, a, b

Si “Z” esta expresado de la forma “a + bi”, se dice que es un numero complejo en forma binomica. Siendo así:

“a” la parte real del complejo “z”

“b” la parte imaginaria del conjunto “z”

“i” la unidad imaginaria y verifica

Consideraciones:

1. Si im(z) = 0 entonces el conjunto “z” es un real puro
2. Si RE(z), im(z) ≠ 0 entonces el conjunto “z” es un imaginario puro

Igualdad y operaciones con complejos

Se dice que dos conjuntos “z” y ”w” ℂ son iguales si solo si sus partes reales e imaginarias de cada uno son iguales.

Sean Z = a + bi y W = c + di dos números complejos, las operaciones de suma y producto entre complejos se definen de la siguiente forma:

Suma

Z + W = (a + bi) + (c + di)= ((a + c) + (b + d)i)

Producto

Z \* W = (a + bi)\*(c + di)=(ac - bd) + (ad + bc)i

Estas operaciones de duma y producto definidas son cerradas dentro del conjunto ℂ

El conjunto 〈ℂ;+,\*〉Es un cuerpo de operaciones de suma y producto que verifica las siguientes propiedades:

Para la suma:

* Ley asociativa.



* Ley conmutativa.



* Existencia del elemento neutro.



* Existencia del opuesto.



Para el Producto:

* Ley asociativa.



* Ley conmutativa.



* Existencia del elemento neutro.



* Existencia del inverso.



Para ambos:

* Ley distributiva del producto con respecto a la suma.



Observaciones:

* El elemento neutro de la suma es 0 y tiene parte real e imaginaria nulas, es decir:

0 = 0 + 0i

* Si z ℂ, z = a + bi, el opuesto de z es:

-z = -a+(-b)i

* El elemento neutro del producto tiene en la parte real el 1 y 0 en la imaginaria, siendo así:

1 = 1 + 0i

* Si z ℂ -{0}, z = a + bi, el inverso de z es:

Entonces Re(z-1) = y im(z-1) =

* Sean z y w ℂ

z – w = z + (-w) y

* Si z = a + bi y w = c + di

Entonces:

Definiciones:

* Z0 = 1
* Z1 = Z
* Zn = Zn-1 \* Z
* Zn = (Z-1)-n

Proposición:

* (z \* w)n = Zn \* Wn
* Zn \* Zm = Zn + m
* (Zn)m = Zn\*m

Potencias de la unidad imaginaria *i*

Se sabe que *i*= 0 + 1\**i* y que *i*2 = -1 entonces *i*3 = (-1)\**i* = -i e *i*4 = *i*3 \* *i* = -*i* \**i* = *-i2* = *-(-1) = 1*

Por lo tanto , donde 0 ≤ r < 4 y es el resto de la división de n por 4. Siendo así:

r = n – 4 \* C, Siendo C el cociente de la división.

El conjugado de un numero complejo

Sean z ℂ, z = a + bi. El conjugado de z es a – bi y se denota como , es decir,

Observaciones:

* Si z ≠ 0 entonces ≠ 0.

Demostración

Z = a + bi y z ≠ 0 ⇔ a ≠ 0 o b ≠ 0 ⇔ a ≠ 0 o -b ≠ 0

⇔ a – bi ≠ 0 ⇔ ≠ 0

∴

Proposición:

* Z = w ⇔
* = z
* sí solo si z ∈ ℝ
* Si solo si z es un imaginario puro o z = 0

Módulo de un numero complejo.

Sea z ∈ ℂ, z = a + bi. El módulo de z es un número real, positivo o nulo, siendo así:

Se observa que y es la raíz cuadrada aritmética del numero , es decir,es la única raíz real positiva de

Observaciones:

* Si z = 0 entonces a = 0, b = 0 y .
* Si z ∈ ℝ entonces b = 0 y .
* Si z es un imaginario puro, entonces a = 0 y

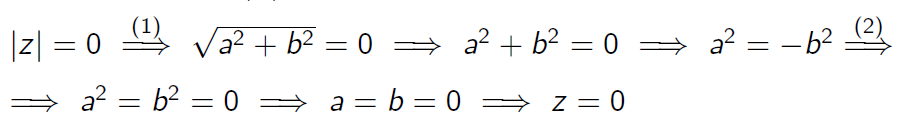
Proposiciones:

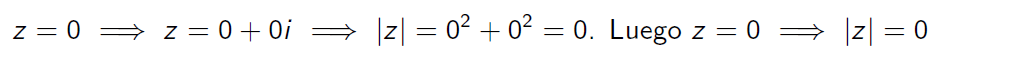
* y

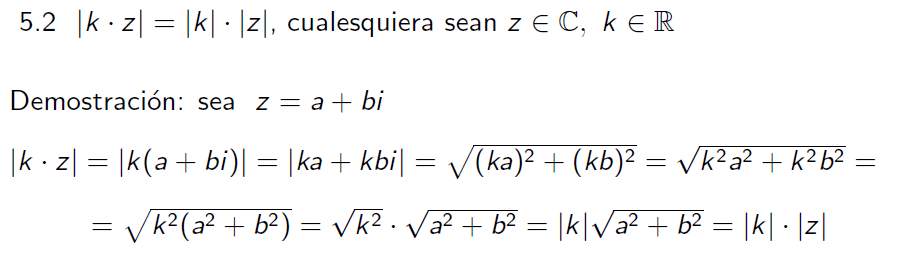
Demostraciones:

Demostración:

Demostración:





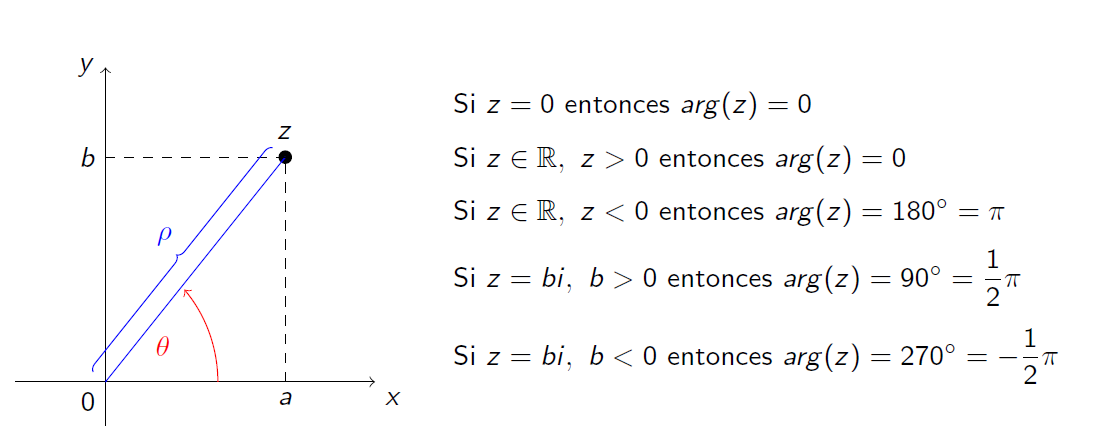


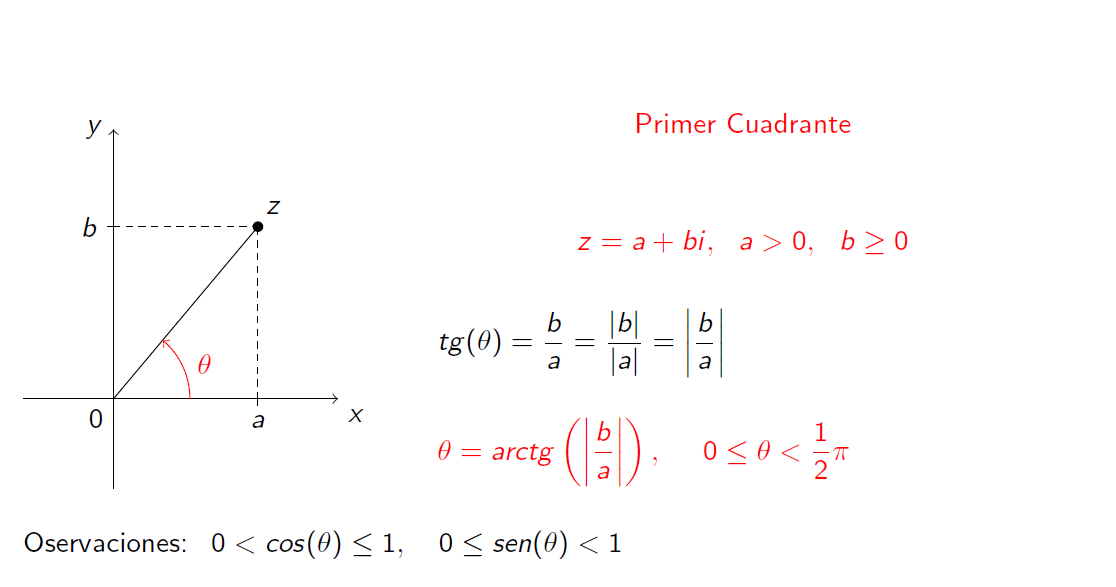
Argumento de un numero complejo

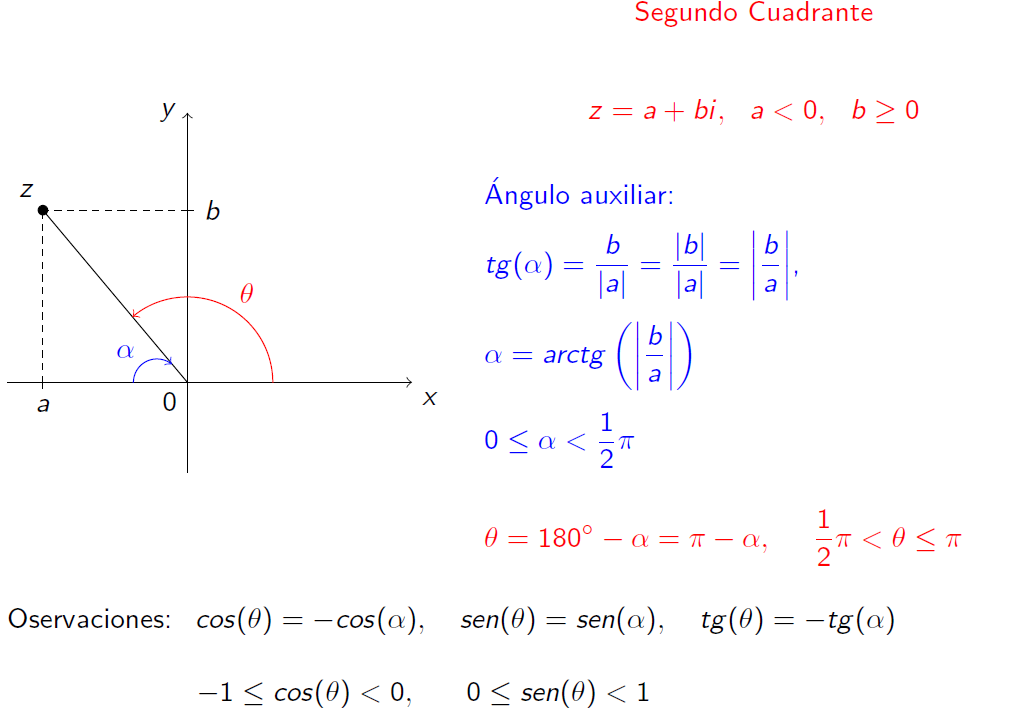
Dado un numero z = a + bi, , el argumento de z , es el Angulo formados por el semi eje real y el semieje imaginario y el segmento que determina el módulo de z, a menos de un múltiplo entero de , tomándose como sentido ´positivo el sentido antihorario.

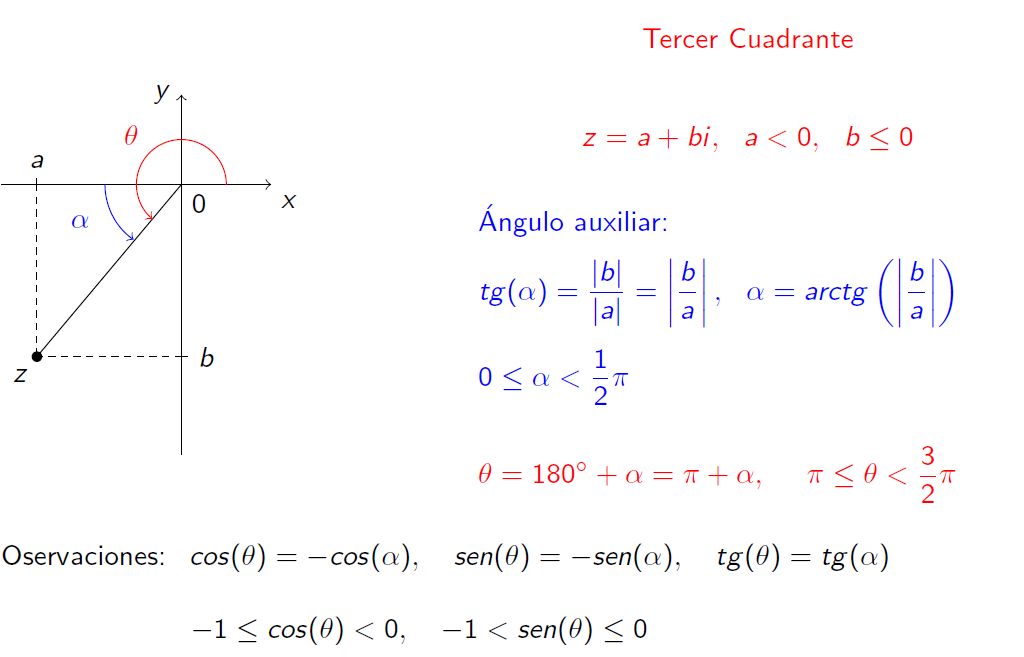
Si es el argumento de z, también serán argumento de z los ángulos de la forma con k , el argumento de z va comprendido entre los valores 0 y , es decir que

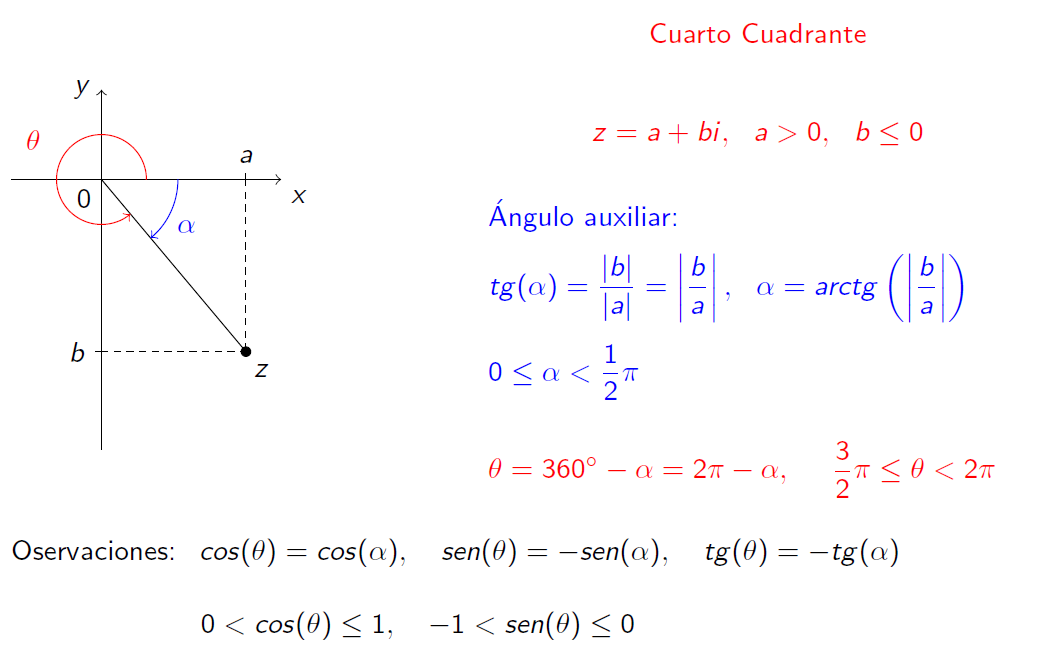
Para indicar que es el argumento principal de z, se escribe que





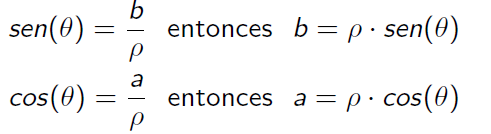




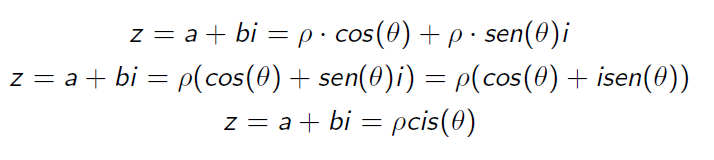


Forma polar números complejos.

Si z es distinto de 0 y se considera a un módulo y el argumento de z, se pueden establecer las siguientes relaciones:

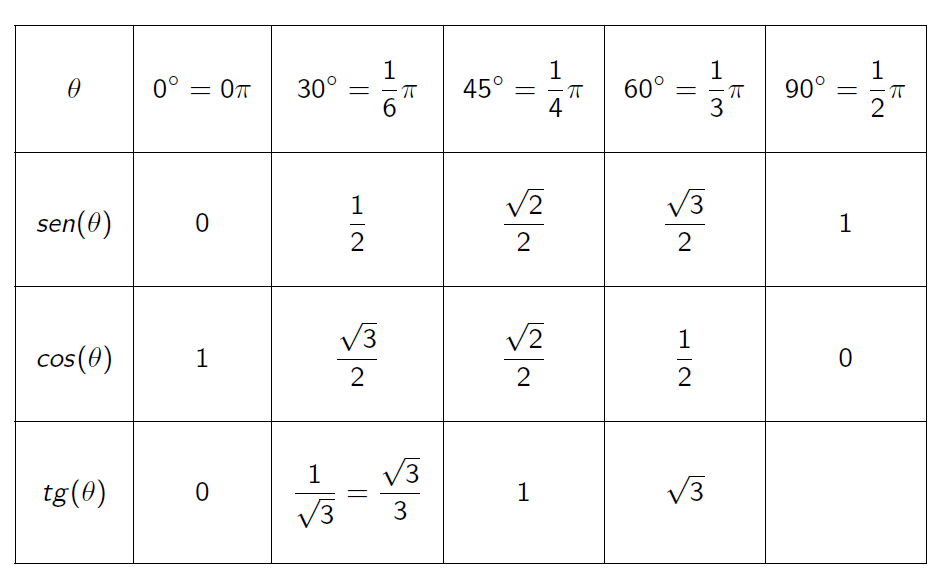


Por lo que se deduce que



Definición:

Sea z ∈ . La forma polar de z es:

Donde es el módulo del complejo z y es el argumento de z